

---

**Analyse II-S2 (1h)**

---

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes

1.  $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$  sur  $]0, +\infty[$ .

2.  $y' - y = x^\alpha \exp(x)$ , sur  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.** Calculer les primitives suivantes :

$$\int x \arctan(x) dx, \int \frac{1}{\cos(x)} dx, \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

**Exercice 3.**

1. Montrez que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  est croissante sur  $[e, +\infty[$ .

2. Déterminez un équivalent, quand  $n$  tend vers l'infini, de  $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\ln x}$ .

**Exercice 4.**

1. Montrer que les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{2t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)}$  convergent et calculer leur valeur.

2. Calculer la limite suivante

$$V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}.$$